ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

—o0o—

NGUYỄN THỊ MAI

VỀ MỘT MÔ HÌNH CÂN BẰNG NASH - COURNOT VỚI CƯỚC PHÍ LÕM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ MAI

VỀ MỘT MÔ HÌNH CÂN BẰNG NASH - COURNOT VỚI CƯỚC PHÍ LÕM

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - Năm 2016

Mục lục

Lời mở đầu

Mô hình cân bằng thị trường bán độc quyền A. Cournot đưa ra vào năm 1838 và đã được rất nhiều tác giả trên thế giới tập chung nghiên cứu. Mô hình Cournot có vai trò rất quan trọng trong thực tiễn cuộc sống, đặc biệt là trong lĩnh vực kinh tế. Một tiếp cận thường được dùng trong mô hình Cournot là sử dụng khái niệm cân bằng Nash.

Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của mô hình là giải quyết các bài toán với mô hình cước phí lõm. Trong những bài toán thực tế, khi số lượng hàng hóa sản xuất tăng lên thì cước phí để sản xuất một đơn vị sản phẩm sẽ giảm đi. Do đó cước phí sẽ là lõm.

Nội dung của luận văn này trình bày về cách tiếp cận mô hình cân bằng Nash - Cournot với cước phí lõm, và nghiên cứu về thuật toán để tìm ra điểm cân bằng khi mô hình có cước phí là lõm. Bản luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này tìm hiểu các kiến thức về tập lồi, hàm lồi, hàm lõm, toán tử đơn điệu, cực trị của hàm lồi. Sau đó là tìm hiểu về bất đẳng thức biến phân.

Chương 2: Mô hình Nash - Cournot với cước phí lõm

Giới thiệu về mô hình Nash - Cournot cổ điển và cách chuyển mô hình về dạng bài toán quy hoạch hàm toàn phương lồi mạnh. Sau đó, nghiên cứu mô hình Nash - Cournot với cước phí lõm và giới thiệu một phương pháp giải mô hình trong trường hợp hàm chi phí lõm và tuyến tính từng khúc.

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới thầy giáo hướng dẫn GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thiện luận văn.

Tôi cũng xin kính gửi lời cảm ơn tới toàn thể thầy cô tham gia giảng dạy khóa học cao học 2014 - 2016, những người đã tâm huyết giảng dạy trang bị cho tôi những kiến thức cơ sở.

Xin gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập tại trường.

Đồng thời, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K8A đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 05 năm 2016.

Tác giả

Nguyễn Thị Mai

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng ta sẽ giới thiệu những kiến thức cơ bản về tập lồi, hàm lồi, toán tử đơn điệu... Tiếp đó là trình bày về bài toán bất đẳng thức biến phân. Các kiến thức ở chương này được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2], [3], [7].

Trong luận văn này chúng ta kí hiệu $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide thực n chiều. Một phần tử $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ là một vectơ cột. Ta nhắc lại với hai véctơ $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

được gọi là *tích vô hướng* của hai vectơ. *Chuẩn Euclide* của phần tử x và *khoảng cách Euclide* giữa hai phần tử x, y được định nghĩa như sau:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, y \rangle},$$

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

1.1 Tập lồi, hàm lồi, hàm lõm

Định nghĩa 1.1. *Một tập $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu với $\forall x, y \in C$, mọi $0 \le \lambda \le 1$, ta có:*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in C.$$

Một số ví dụ về tập lồi: Các tập afin (các siêu phẳng), hình tròn, hình vuông... Tuy nhiên, hình vành khăn, đường tròn không phải là tập lồi.

Định nghĩa 1.2. *Hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup (+\infty)$ được gọi là:*

(i) Lồi trên C nếu với mọi $\lambda \in (0, 1)$, mọi $x, y \in C$ ta có:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

(ii) Lồi chặt trên C nếu mọi $\lambda \in (0,1)$, mọi $x, y \in C$, mọi $x \neq y$ ta có:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

(iii) Lồi mạnh rên C nếu với mọi $\lambda \in (0,1)$, mọi $x, y \in C$, tồn tại $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ ta có:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\eta\|x-y\|^2.$$

(iv) Lõm trên C nếu $-f$ là hàm lồi trên C.

Định nghĩa 1.3. *Cho hàm bất kỳ: $f : S \to (-\infty, +\infty]$ với $S \subseteq \mathbb{R}^n$, các tập*

$$dom\mathrm{f} = \{x \in S : f(x) < +\infty\},$$

và

$$epi\mathrm{f} = \{(x, \alpha) \in S \times R : f(x) \leq \alpha\}.$$

được gọi lần lượt là miền hữu dụng và tập lồi trên đồ thị của hàm f.

Nếu $dom\mathrm{f} \neq \phi; f(x) > -\infty \ \forall x \in S$ thì ta nói f là *chính thường.* Nói cách khác f là chính thường nếu $dom\mathrm{f} \neq \phi$.

Định lý 1.1. *Hàm $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ là hàm lồi khi và chỉ khi hàm một biến số $\varphi(\lambda) \equiv f(x + \lambda d)$ là hàm lồi theo λ với mỗi $x, d \in \mathbb{R}^n$.*

Chứng minh.

Ta thấy điều kiện cần là rõ ràng. Ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $\varphi(\lambda)$ là hàm lồi với mọi $x, d \in \mathbb{R}^n$. Lấy bất kỳ $x, y \in \mathbb{R}^n$ và đặt $d = x - y$. Khi đó, với mọi $\lambda \in [0,1]$ ta có:

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &= f(x + \lambda d) = \varphi(\lambda) = \varphi((1-\lambda).0 + \lambda.1) \\ &\leq (1-\lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(1) = (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

□

Định nghĩa 1.4. *Một hàm a-phin là hàm số có dạng $f(x) = \langle c, x\rangle + \alpha$ trong đó $c \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ cho trước tùy ý.*

Nếu $f(x)$ là hàm a-phin thì với mỗi $x, y \in \mathbb{R}^n$ và mọi số λ, β sao cho $\lambda + \beta = 1$ ta có:

$$f(\lambda x + \beta y) = \lambda f(x) + \beta f(y).$$

Một hàm a-phin $f(x) = \langle c, x\rangle + \alpha$ không lấy giá trị âm thì phải đồng nhất với một hằng số (véctơ c phải bằng 0), vì nếu $c \neq 0$ thì ta sẽ có:

$$f(\lambda x) = \langle c, x\rangle + \alpha \to -\infty,$$

khi $\lambda \to -\infty$.

Định nghĩa 1.5. *Một tập con M của $\mathbb{R}^n$ được gọi là nón (mũi tại 0) nếu $x \in M, \lambda > 0$ thì $\lambda x \in M$. Nón M gọi là nón lồi nếu M là tập lồi.*

Điểm gốc 0 có thể thuộc hoặc không thuộc M. Nón M không chứa đường thẳng nào gọi là nón nhọn. Trong trường hợp này, gốc 0 gọi đỉnh của M. Mỗi nửa không gian (đóng hay mở) đều là một nón, nhưng không phải là một nón nhọn.

Định lý 1.2. *Tập con M của $\mathbb{R}^n$ là một nón lồi có đỉnh tại gốc khi và chỉ khi $\lambda M \subset M, \forall \lambda > 0$ và $M + M \subset M$.*

Nghĩa là với mọi x, y thuộc M và với mọi số $\lambda > 0$ ta có $x + y \in M$ và $\lambda x \in M$.

Chứng minh.

Nếu M là một nón lồi thì thì $\lambda M \subset M, \forall \lambda > 0$ theo định nghĩa của nón. Hơn nữa, lấy $x, y \in M$ thì do M lồi nên $\frac{1}{2}(x + y) \in M$, do đó theo trên $x + y \in M$. Vì thế $M + M \subset M$.

Ngược lại, nếu có $\lambda M \subset M, \forall \lambda > 0$ và $M + M \subset M$ thì M là một nón và với mọi $x, y \in M$, $\lambda \in [0, 1]$ ta có: $(1 - \lambda) x \in M, \lambda y \in M$. Từ đó, $(1 - \lambda) x + \lambda y \in M$, nghĩa là M là một tập lồi. □

Tập con $M \in C$ là một nón lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp tuyến tính không âm (còn gọi là *tổ hợp nón*) của các phần tử thuộc nó.

Nhận xét 1.1.

* Có thể chứng minh hàm f lồi trên S khi và chỉ khi:

+) Tập trên đồ thị $epif$ là một tập lồi hoặc

+) $f\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k x^k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k f\left(x^k\right)$, $\forall x^k \in S, \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0$ với mọi k, trong đó m là số nguyên ≥ 2 (Bất đẳng thức Jensen).

* *Hàm lồi* $f : S \to (-\infty, +\infty]$ có thể được mở rộng thành *lồi* xác định trên toàn không gian $\mathbb{R}^n$ bằng cách đặt $f(x) = +\infty\ \forall x \notin S$. Vì vậy, để đơn giản ta thường xét hàm lồi trên toàn $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.6. *Bao đóng của một tập C, kí hiệu là $\overline{C}$ là giao của tất cả các tập đóng chứa C.*

Định nghĩa 1.7. *Một điểm $a \in C$ được gọi là điểm trong tương đối của C nếu nó là điểm trong của C theo tô-pô cảm sinh bởi $affC$ (tập a-phin nhỏ nhất chứa C). Kí hiệu tập các điểm trong tương đối của C là riC. Theo định nghĩa ta có:*

$$riC := \{a \in C | \exists B : (a + B) \cap \mathrm{affC} \subset C\}.$$

trong đó B là một lân cận mở của gốc. Hiển nhiên

$$riC = \{a \in \text{affC} | \exists B : (a + B) \cap \text{affC} \subset C\}.$$

Định lý 1.3. *Bao đóng và phần trong tương đối của một tập lồi là tập lồi.*

Chứng minh.
Giả sử C là một tập lồi và $a, b \in \overline{C}$.
Chẳng hạn $a = \lim\limits_{k \to \infty} x^k, b = \lim\limits_{k \to \infty} y^k$, trong đó $x^k, y^k \in C$ với mọi k. Với mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có: $(1 - \lambda) x^k + \lambda y^k \in C$.
Từ đó:

$$(1 - \lambda) a + \lambda b = \lim_{k \to \infty} \left\{(1 - \lambda) x^k + \lambda y^k\right\} \in \overline{C}.$$

Như vậy, nếu $a, b \in \overline{C}$ thì $[a, b] \subset \overline{C}$ chứng tỏ $\overline{C}$ lồi.
Bây giờ, giả sử $a, b \in riC$. Khi đó tìm được hình cầu B tâm O sao cho: $(a + B) \cap aff$C và $(b + B) \cap aff$C nằm trọn trong C.
Với $\forall x = (1 - \lambda) a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]$,
Ta có:

$$(x + B) \cap aff\text{C} = (1 - \lambda) (a + B) \cap aff\text{C} + \lambda (b + B) \cap aff\text{C} \subset C.$$

Như vậy $x \in riC$, nghĩa là riC lồi. □

Tính chất 1.1.

a) Giao của một họ bất kỳ các tâp lồi là một tập lồi;

b) Nếu $C, D \in \mathbb{R}^n$ là các tập lồi thì:

$$C + D = \{x + y : x \in C, y \in D\},$$
$$\alpha C = \{\alpha x : x \in C, \alpha \in \mathbb{R}\}, C - D = C + (-1) D.$$

c) Bao đóng của một tập hợp lồi là một tập lồi;

d) Tập hợp của tất cả các tổ hợp lồi của một số hữu hạn các điểm trong $\mathbb{R}^n$ là một tập hợp lồi.

Tập $C \in \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in C, x \neq y$, mọi điểm $\lambda x + (1 - \lambda) y$ với $0 < \lambda < 1$ đều là điểm trong của C.

Mệnh đề 1.1.

(i) Cho f và g là các hàm lồi lần lượt trên các tập lồi A và B, với $A \cap B \neq \phi$. Khi đó, hàm $(\lambda f) + (\beta g)$ lồi trên, với mọi $\lambda, \beta \geq 0$;

(ii) Giới hạn theo từng điểm của một dãy các hàm lồi cũng là một hàm lồi. Tức là: $f_i : C \to \mathbb{R} (i \in N)$ và dãy số $\{f_i (x)\}$ hội tụ với mỗi $x \in C$

thì hàm $f(x) := \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ *cũng lồi trên C;*

(iii) Nếu $f : C \to \mathbb{R}$ *lồi trên C và hàm một biến* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *không giảm trên khoảng I, sao cho* $f(C) \subseteq I$*,thì hàm hợp* $\varphi_0 f$ *lồi trên C.*

1.2 Cực trị của hàm lồi

Định nghĩa 1.8. *Cho* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *khác rỗng và* $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$*. Một điểm* $x^* \in C$ *được gọi là cực tiểu địa phương của f trên C nếu tồn tại một lân cận U của* x^* *sao cho:*

$$f(x^*) \leq f(x) \, \forall x \in U \cap C;$$

Điểm $x^* \in C$ *được gọi là cực đại địa phương nếu:*

$$f(x) \leq f(x^*) \, \forall x \in U \cap C;$$

Nếu

$$f(x) \geq f(x^*) \, \forall x \in C;$$

thì x^* *được gọi là cực tiểu toàn cục hay cực tiểu tuyệt đối của f trên C. Và nếu:*

$$f(x) \leq f(x^*) \, \forall x \in C;$$

thì x^* *được gọi là cực đại toàn cục hay cực đại tuyệt đối của f trên C.*

Mệnh đề 1.2. *Cho* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{+\infty\}$ *lồi. Khi đó, mọi điểm cực tiểu địa phương của f trên một tập lồi đều là cực tiểu toàn cục. Hơn nữa tập hợp các điểm cực tiểu của f là một tập lồi. Nếu f lồi chặt, thì điểm cực tiểu nếu tồn tại sẽ là duy nhất.*

Chứng minh.

Cho $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Giả sử x^* là điểm cực tiểu địa phương của f trên C. Khi đó tồn tại lân cận U của x^* sao cho:

$$f(x^*) \leq f(x) \, \forall x \in U \cap C.$$

với mọi $x \in C$, và $0 < \lambda < 1$ do C lồi và U là lân cận của $x^* \in C$, nên điểm $x_\lambda := (1-\lambda)x^* + \lambda x \in C \cap U$ khi λ đủ nhỏ. Do $f(x^*) \leq f(x_\lambda)$ và f lồi, ta có:

$$f(x^*) \leq f(x_\lambda) \leq (1-\lambda) f(x^*) + \lambda f(x).$$

Từ đây suy ra:

$$f(x^*) \leq f(x).$$